

# Fonctions maximales centrées de Hardy-Littlewood pour les opérateurs de Grushin

Hong-Quan LI

**Résumé.** Considérons l'opérateur de Grushin sur  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u$ ,  $\Delta_G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (\sum_{i=1}^n x_i^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2}$ . Soient  $d_{CC}$  la distance de Carnot-Carathéodory associée,  $d_K$  une pseudo-distance liée à la solution fondamentale de  $\Delta_G$ . On montre qu'il existe une constante  $A > 0$ , indépendante de  $n$ , telle que pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u, dx du)$ , on a  $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq An\|f\|_1$ , où  $M$  désigne la fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood définie soit par  $d_{CC}$ , soit par  $d_K$ . On trouve une relation étroite entre ce sujet et la fonction de Green.

**Mathematics Subject Classification (2000) :** 42B25, 43A80

**Key words and phrases :** Centered Hardy-Littlewood maximal function ; Grushin operators ; Poisson kernel ; Carnot-Carathéodory distance ; Green function

## 1 Introduction

Considérons l'opérateur de Grushin sur  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u$ , qui a été initialement étudié par Grushin (voir par exemple [13])

$$\Delta_G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + |x|^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + U_i^2),$$

avec

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad U_i = x_i \frac{\partial}{\partial u},$$

où les champs de vecteurs infiniment différentiables  $\{X_i, U_i\}_{1 \leq i \leq n}$  satisfont la condition de Hörmander.

Notons  $d_{CC}$  la distance de Carnot-Carathéodory associée à  $\{X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n\}$ , voir par exemple [33]. Pour simplifier les notations, on pose

$$g = (x, u), g' = (x', u') \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u, \quad s = |u - u'|,$$

$$R^2 = |x|^2 + |x'|^2, \quad a = \frac{2x \cdot x'}{R^2} \in [-1, 1], \quad (1.1)$$

avec  $x \cdot x'$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}_x^n$ ; définissons pour  $-\pi < \varphi < \pi$ ,

$$\mu(a; \varphi) = \frac{\varphi}{\sin^2 \varphi} - \cot \varphi + a \frac{1 - \varphi \cot \varphi}{\sin \varphi}. \quad (1.2)$$

On sait que  $\mu(a; \cdot)$  est strictement croissante avec  $\mu(a; 0) = 0$  et est un difféomorphisme de  $] - \pi, \pi[$  sur  $\mathbb{R}$  pour  $-1 < a \leq 1$ , et est un difféomorphisme de  $] - \pi, \pi[$  sur  $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pour  $a = -1$ , voir les Lemmas 2.2-2.5 de [27]. Notons  $\mu^{-1}(a; \cdot)$  sa fonction réciproque. On a (voir le Theorem 2.6 de [27])

- (1) dans le cas où  $x = -x'$  avec  $2s \geq \pi|x|^2$ ,  $d_{CC}(g, g') = \sqrt{2\pi s}$ .
- (2) dans d'autre cas,

$$d_{CC}^2(g, g') = \left( \frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 R^2 (1 - a \cos \theta) \text{ avec } \theta = \mu^{-1} \left( a; \frac{2s}{R^2} \right). \quad (1.3)$$

Lorsque  $g = 0$ , on retrouve la distance de Carnot-Carathéodory sur le groupe de Heisenberg (voir [2]).

On définit maintenant une pseudo-distance  $d_K$  liée à la solution fondamentale de  $\Delta_G$  (c'est-à-dire la fonction de Green, voir la section §2), qui est cruciale pour cet article :

$$d_K(g, g') = \left( \sqrt{R^4 + (2s)^2} - 2x \cdot x' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Lorsque  $g = 0$ , on retrouve la norme de Korányi sur le groupe de Heisenberg (voir par exemple [12]).

On voit que  $d_K$  et  $d_{CC}$  sont équivalentes, plus précisément, il existe une constante  $C > 1$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$d_K(g, g') \leq d_{CC}(g, g') \leq C d_K(g, g'), \quad \forall g, g'. \quad (1.5)$$

En effet, l'inégalité à gauche est donnée par la Proposition 5.1 de cet article. Pour vérifier l'inégalité à droite, il suffit d'utiliser la Proposition 5.1 de [28] et d'observer que les (pseudo-)distances sont indépendante de dimension. Ce sera très intéressant de savoir si  $d_K$  est une distance sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Dans la suite, on note  $B_K(g, r)$  la boule ouverte de centre  $g$  et de rayon  $r > 0$  définie par la pseudo-distance  $d_K$ , et  $B_{CC}(g, r)$  celle définie par la distance de Carnot-Carathéodory. Si  $E$  est un ensemble mesurable, alors on note  $|E|$  son volume et  $\chi_E$  sa fonction caractéristique. On montrera que pour tout  $g = (x, u)$  et tout  $r > 0$ , on a

$$\frac{1}{8} r^{n+1} (r + |x|) B\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right) |S^{n-1}| \leq |B_K(g, r)| \leq r^{n+1} (r + |x|) B\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right) |S^{n-1}|, \quad (1.6)$$

où  $|S^{n-1}|$  désigne la surface de la sphère unitaire dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B(\frac{n}{2}, \frac{3}{2})$  étant la fonction de Beta d'indices  $\frac{n}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ . Il existe une structure de dilatation sur  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, d, dg)$  avec  $d = d_K$  ou bien  $d_{CC}$  :

Pour tout  $r > 0$ , définissons

$$\begin{aligned} \delta_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \delta_r(x, u) &= (rx, r^2u); \end{aligned}$$

et pour  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , définissons  $\delta_r A = \{\delta_r(g); g \in A\}$ . Alors, pour tous  $g, g'$  et tout  $r > 0$ , on a

$$d(\delta_r(g), \delta_r(g')) = rd(g, g'), \quad B(g, r) = \delta_r B(\delta_{r^{-1}}g, 1), \quad |B(g, r)| = r^{n+2}|B(\delta_{r^{-1}}g, 1)|,$$

avec  $B = B_K$  ou bien  $B = B_{CC}$ . Cependant,  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, d, dg)$  n'a pas de la propriété d'invariance par translation.

Par les Propositions 5.1 et 5.2 ci-après, il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout  $g \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et tout  $r > 0$ , on a

$$c|B_K(g, r)| \leq |B_{CC}(g, r)| \leq |B_K(g, r)|. \quad (1.7)$$

En particulier, (1.6) et (1.7) nous disent que  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, d, dg)$  est un espace de nature homogène au sens de Coifman-Weiss (voir [8]).

Pour  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ , on définit les deux fonctions maximales centrées de Hardy-Littlewood  $M_K f$  et  $M_{CC} f$  respectivement par

$$\begin{aligned} M_K f(g) &= \sup_{r>0} |B_K(g, r)|^{-1} \int_{B_K(g, r)} |f(g')| dg', \quad \forall g, \\ M_{CC} f(g) &= \sup_{r>0} |B_{CC}(g, r)|^{-1} \int_{B_{CC}(g, r)} |f(g')| dg', \quad \forall g. \end{aligned}$$

Notre résultat principal est le

**Théorème 1.1** *Il existe une constante  $L > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq Ln\|f\|_1, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \quad (1.8)$$

avec  $M = M_K$  ou bien  $M = M_{CC}$ .

Ce type d'estimation a été obtenu par Stein et Strömberg dans le cadre des espaces euclidiens pour la fonction maximale standard de Hardy-Littlewood (voir [32]). Remarquons que l'estimation précédente a été obtenue dans [20] sur les groupes de Heisenberg pour la fonction maximale définie par la distance de Carnot-Carathéodory ou bien par celle de Korányi.

Par (1.4), (1.6) et (1.7), on peut montrer que  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, d_{CC}, dg)$  satisfait la propriété de “strong  $n+1$ -microdoubling with constant  $L_1$ ” au sens de [25], i.e.

$$|B_{CC}(g', (1 + \frac{1}{n+1})r)| \leq L_1 |B_{CC}(g, r)|, \quad \forall g, r > 0, g' \in B_{CC}(g, r).$$

Par le Corollary 1.2 de [25], qui est motivée par [32] et valable dans une situation très générale, il existe une constante  $C(L_1) > 0$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$\|M_{CC} f\|_{L^{1,\infty}} \leq C(L_1)(n+1) \ln(n+1) \|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1. \quad (1.9)$$

Pour d'autres travaux au sujet des estimations de type (1.9) et (1.8), voir [32], [25] et leurs références.

L'idée principale de la démonstration du Théorème 1.1 est d'utiliser "the Hopf-Dunford-Schwartz maximal ergodic theorem" (voir [9] pp.690-691) comme dans [32]. Afin de comprendre d'où vient l'estimation (1.8), on explique brièvement, au point de vue de la fonction de Green, la preuve de Stein-Strömberg dans le cadre des espaces euclidiens :

en notant  $e^{h\Delta_{\mathbb{R}^n}}$  ( $h > 0$ ) le semi-groupe de la chaleur, par "the Hopf-Dunford-Schwartz maximal ergodic theorem" et la structure de dilatation sur  $\mathbb{R}^n$ , il suffit de montrer qu'il existe une constante  $A > 0$ , indépendante de  $n$  ( $\geq 3$ , si l'on veut), telle que pour un certain  $s(n) > 0$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $x \neq x' \in B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} |B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)|^{-1} &\leq An \frac{1}{s(n)} \int_0^{s(n)} e^{h\Delta_{\mathbb{R}^n}}(x, x') dh \\ &= \frac{An}{s(n)} \left[ (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} - (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} e^{s(n)\Delta_{\mathbb{R}^n}} \right](x, x'), \end{aligned}$$

par la formule explicite du noyau de la chaleur sur  $\mathbb{R}^n$ , en choisissant  $s(n) = \frac{1}{n}$ , on voit qu'il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$\left[ (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} - (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} e^{s(n)\Delta_{\mathbb{R}^n}} \right](x, x') \geq c(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x, x'), x \neq x' \in B_{\mathbb{R}^n}(x, 1). \quad (1.10)$$

Pour terminer la preuve, il suffit d'utiliser le fait que pour  $n \geq 3$ ,

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x, x') = \frac{|x - x'|^{2-n}}{n(n-2)} |B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)|^{-1}.$$

Remarquons que  $(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} e^{s(n)\Delta_{\mathbb{R}^n}}$  est positif, on a

$$\left[ (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} - (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1} e^{s(n)\Delta_{\mathbb{R}^n}} \right](x, x') \leq (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x, x').$$

En gros, il faut prendre  $\phi(n) = n$  telle que

$$\inf_{x \neq x' \in B_{\mathbb{R}^n}(x, 1), n \geq 3} \phi(n) |B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)| n (-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x, x') > 0, \quad (1.11)$$

et on obtient (1.8) avec  $n = \phi(n)$ . On remarque que le résultat de [20] peut aussi être expliqué par une estimation de type (1.11). Naturellement, on s'intéresse à étudier la fonction de Green pour l'opérateur de Grushin et à étudier une estimation de type (1.11). Ça nous explique pourquoi la pseudo-distance s'introduit et pourquoi on a le théorème 1.1. Evidemment, cette explication n'est pas sérieuse puisqu'on ne sait pas comment établir l'estimation de type (1.10) dans le cadre des groupes de Heisenberg et des opérateurs de Grushin. Remarquons qu'on a obtenu dans [19] et dans [21] des estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg et pour  $\Delta_G$  respectivement ; cependant, ces estimations ne sont pas uniformément en dimension (ce sera très intéressant de considérer ce problème et d'étudier l'estimation de type (1.10)). Donc, on utilisera le noyau de Poisson comme dans [20] au lieu du noyau de la chaleur utilisé dans [32]. Dans les grandes lignes, il s'agit d'une estimation de type

$$\inf_{x \neq x' \in B(x, 1), n \geq 3} \phi(n) |B(x, 1)| \sqrt{n} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(x, x') > 0, \quad (1.12)$$

où le choix de  $\sqrt{n}$  est optimal à part d'une constante universelle comme on a expliqué dans [20]. Voir l'appendice pour plus d'explication.

Dans [23], on s'adapte les méthodes de cet article et de [20] pour qu'ils soient valables dans des situations beaucoup plus compliquées. Plus précisément, sur les espaces hyperboliques réel de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ),  $\mathbb{H}^n$ , qui sont à croissance exponentielle du volume, on montre qu'il existe une constante  $L > 0$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$\|M\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \leq Ln \ln n,$$

où  $M$  désigne la fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood sur  $\mathbb{H}^n$ .

Cet article est organisé de la façon suivante : on considérera dans la section 2 la fonction de Green pour l'opérateur de Grushin et la pseudo-distance  $d_K$ . On étudiera les estimations uniformément asymptotiques du noyau de Poisson dans la section 3. La démonstration du Théorème 1.1 sera donnée dans la section 4 pour  $M = M_K$  et dans la section 5 pour  $M = M_{CC}$ .

## 1.1 Notations

Dans toute la suite,  $c$ ,  $A$ , etc. désigneront des constantes universelles qui peuvent changer d'une ligne à l'autre.

Pour deux fonctions  $f$  et  $g$ , on dit que  $f = O(g)$  s'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $|f| \leq c|g|$ ; que  $f = o(g)$  si  $\lim \frac{f}{g} = 0$ ; et que  $f \sim g$  s'il existe une constante  $A > 1$  telle que  $A^{-1}f \leq g \leq Af$ .

## 2 La fonction de Green pour l'opérateur de Grushin

Après avoir fini ce travail, on trouve que dans [1], Beals et al. ont obtenu une expression pour la fonction de Green dans une situation un peu plus générale. Cependant, leur expression n'est ni claire, ni pratique pour cet article, surtout elle n'offre aucune information pour s'introduire naturellement la pseudo-distance  $d_K$ , qui est essentiel pour ce travail. On utilisera une autre méthode pour donner la fonction de Green.

Soit  $p_h = p_h^{(n)}$  ( $h > 0$ ) le noyau de la chaleur (c'est-à-dire le noyau intégral de  $e^{h\Delta_G}$ ) sur  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \Delta_G, dg)$ . L'expression explicite suivante de  $p_h$  a été obtenue par Paulat dans [27] :

$$p_h((x, u), (x', u')) = (4\pi h)^{-\frac{n}{2}-1} K\left(\frac{1}{4h}(|x|^2 + |x'|^2), \frac{2x \cdot x'}{|x|^2 + |x'|^2}; \frac{1}{4h}|u - u'|\right), \quad (2.1)$$

où la fonction  $K$  est définie sur  $\mathbb{R}_+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R}_+$  par

$$K(s_1, s_2; s_3) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\lambda}{\sinh \lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(2i\lambda s_3 - s_1(\lambda \coth \lambda - \frac{\lambda}{\sinh \lambda} s_2)\right) d\lambda. \quad (2.2)$$

La fonction de Green est donnée par

$$(-\Delta_G)^{-1}(g, g') = \int_0^{+\infty} p_h(g, g') dh;$$

notons

$$X = X(g, g', \lambda) = \int_0^{+\infty} h^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ \frac{1}{4h} \left( i(2s\lambda) - R^2 \left( \lambda \coth \lambda - \frac{\lambda}{\sinh \lambda} a \right) \right) \right\} dh,$$

on a (formulement)

$$(-\Delta_G)^{-1}(g, g') = (4\pi)^{-\frac{n}{2}-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\lambda}{\sinh \lambda} \right)^{\frac{n}{2}} X d\lambda.$$

Par le changement de variable

$$\gamma = \frac{R^2 \left( \lambda \coth \lambda - \frac{\lambda}{\sinh \lambda} a \right) - i(2s\lambda)}{4h},$$

on voit que

$$\begin{aligned} X &= \left[ \frac{R^2 \left( \lambda \coth \lambda - \frac{\lambda}{\sinh \lambda} a \right) - i(2s\lambda)}{4} \right]^{-\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} \gamma^{\frac{n}{2}-1} e^{-\gamma} d\gamma \\ &= \left[ \frac{4}{R^2 \left( \lambda \coth \lambda - \frac{\lambda}{\sinh \lambda} a \right) - i(2s\lambda)} \right]^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \end{aligned}$$

donc,

$$(-\Delta_G)^{-1}(g, g') = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}} \left[ R^2 \cosh \lambda - i(2s \sinh \lambda) - R^2 a \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda.$$

Posons

$$D_K(R^2, 2s) = \left[ R^4 + (2s)^2 \right]^{\frac{1}{4}},$$

et  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  telle que

$$e^{-i\phi} = D_K^{-2}(R^2, 2s)[R^2 - i(2s)].$$

On a alors

$$R^2 \cosh \lambda - i(2s \sinh \lambda) = D_K^2(R^2, 2s) \cosh(\lambda - i\phi), \quad (2.3)$$

et formulement

$$\begin{aligned} (-\Delta_G)^{-1}(g, g') &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}} \left[ D_K^2(R^2, 2s) \cosh(\lambda - i\phi) - R^2 a \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}} \left[ D_K^2(R^2, 2s) \cosh \lambda - R^2 a \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression intégrale de la fonction de Legendre  $P_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{n-1}{2}}$  (voir [10] p.156), on peut obtenir une expression pour  $(-\Delta_G)^{-1}$ . Cependant, ce n'est pas nécessaire pour cet article. Remarquons que la dimension homogène de  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \Delta_G, dg)$  est de  $n+2$ . En rappelant l'estimation classique de la fonction de Green hypoelliptique (voir par exemple [29], [17], [11] et [14], qui peut aussi être expliquée facilement par les estimations classiques du noyau de la chaleur), on écrit naturellement

$$\begin{aligned} (-\Delta_G)^{-1}(g, g') &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}} \left[ (D_K^2(R^2, 2s) - R^2 a) + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} d_K^{-n}(g, g') \int_{\mathbb{R}} \left[ 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}+1}} d_K^{-n}(g, g') \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \lambda \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, posons

$$Y = \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \lambda \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda.$$

On voit facilement que

$$\frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \geq 1.$$

On montrera qu'il existe une constante  $c > 1$ , indépendante de  $(n, \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')})$ , telle que pour tout  $n \geq 2$  et tout  $\frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \geq 1$ ,

$$c^{-1}n^{-\frac{1}{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} \leq Y \leq cn^{-\frac{1}{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)}. \quad (2.4)$$

En fait, puisque  $\sinh \lambda \geq \lambda$  pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} Y &\leq \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \lambda^2 \right]^{-\frac{n}{2}} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

voir [10] p.10 (16). On sait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) \leq Cn^{-\frac{1}{2}}$  pour tout  $n \geq 2$ . Donc, on obtient la majoration de  $Y$ .

D'ailleurs, on a

$$Y = \int_0^{+\infty} \exp \left[ -\frac{n}{2} \ln \left( 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \lambda \right) \right] d\lambda.$$

Or,

$$\sinh \lambda \leq 2\lambda, \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \ln(1+s) \leq s, \quad \forall s \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} Y &\geq \int_0^1 \exp \left[ -\frac{n}{2} \ln \left( 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} 4\lambda^2 \right) \right] d\lambda \\ &\geq \int_0^{(4\frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')})^{-\frac{1}{2}}} \exp \left[ -4\frac{n}{2} \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \lambda^2 \right] d\lambda \\ &\geq 2^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} \int_0^1 e^{-h^2} dh. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $A_1 > 1$  telle que pour tout  $n \geq 2$  et tous  $g \neq g'$ , on a

$$A_1^{-1} \leq \frac{(-\Delta_G)^{-1}(g, g')}{\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}} d_K^{-n}(g, g') n^{-\frac{1}{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)}} \leq A_1. \quad (2.5)$$

## 2.1 Estimation de $|B_K(g, 1)|$

Le but de cette sous-section est de montrer l'estimation (1.6). Par la structure de dilatation, il suffit de considérer le cas où  $r = 1$ .

Rappelons que

$$d_K^2((x, u), (x', u')) = \sqrt{(|x|^2 + |x'|^2)^2 + (2|u' - u|)^2} - 2x' \cdot x,$$

on constate d'abord que

$$(x', u') \in B_K((x, u), 1) \iff (2|u' - u|)^2 < (1 + 2x' \cdot x)^2 - (|x|^2 + |x'|^2)^2,$$

puis, par le fait que

$$(1 + 2x' \cdot x)^2 - (|x|^2 + |x'|^2)^2 = (1 - |x' - x|^2) \cdot (1 + |x' + x|^2),$$

que

$$(x', u') \in B_K((x, u), 1) \iff |x' - x| < 1, 2|u' - u| < \sqrt{1 - |x' - x|^2} \cdot \sqrt{1 + |x' + x|^2}. \quad (2.6)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |B_K((x, u), 1)| &= \int_{|x' - x| < 1} \sqrt{1 - |x' - x|^2} \cdot \sqrt{1 + |x' + x|^2} dx' \\ &= \int_{|z| < 1} \sqrt{1 - |z|^2} \cdot \sqrt{1 + |2x - z|^2} dz, \end{aligned} \quad (2.7)$$



par le changement de variable  $x' = x - z$ . Comme

$$\max(2|x| - 1, 0) \leq |2x - z| \leq 2|x| + 1, \quad \forall |z| < 1,$$

on voit facilement que

$$\frac{1}{4}(1 + |x|) \leq \sqrt{1 + |2x - z|^2} \leq 2(1 + |x|). \quad (2.8)$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{|z|<1} \sqrt{1 - |z|^2} dz &= \int_0^1 r^{n-1} \sqrt{1 - r^2} dr |S^{n-1}| \\ &= \frac{1}{2} |S^{n-1}| \int_0^1 h^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{1 - h} dh = \frac{1}{2} |S^{n-1}| B\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

(2.7) et (2.8) impliquent (1.6).

Remarquons que

$$d_K(g, g') < 1 \implies D_K(R^2, 2s) \leq \sqrt{d_K^2(g, g') + R^2} \leq 1 + (|x| + |x'|) \leq 2(1 + |x|), \quad (2.9)$$

par le fait que  $|S^{n-1}| = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ , on déduit de (1.6) et de (2.5) qu'une estimation de type (1.11) avec  $\phi(n) = n$ , i.e.

$$\inf_{g \neq g' \in B_K(g, 1), n \geq 2} n |B_K(g, 1)| n (-\Delta_G)^{-1}(g, g') > 0,$$

qui est le point de départ de cet article.

### 3 Estimations uniformément asymptotiques du noyau de Poisson pour $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \Delta_G, dg)$

On suit la stratégie de [20]. Il faut dire qu'une estimation inférieure uniformément du noyau de Poisson est suffisante pour démontrer le Théorème 1.1.

Soit  $P_h = P_h^{(n)}$  ( $h > 0$ ) le noyau de Poisson (c'est-à-dire le noyau intégral de  $e^{-h\sqrt{-\Delta_G}}$ ). Par convention, on note  $P = P_1$ . Notons  $Q = n + 2$ . Par la structure de dilatation, on a

$$P_h(g, g') = h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')), \quad \forall h > 0, g, g' \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

On a les estimations uniformément asymptotiques de  $P$ , donc celles de  $P_h$ , comme suit :

**Proposition 3.1** Soit  $U \gg 1$ . Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $d_K(g, g') \geq U\sqrt{n}$ , on a

$$P(g, g') = \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) d_K^{-Q-1}(g, g') \\ \times \left( 1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right) \right) \left( 1 + O(n^{-\frac{1}{2}}) \right),$$

où  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  est déterminé par  $e^{-i\phi} = D_K^{-2}(R^2, 2s)[R^2 - i(2s)]$ .

**Preuve.** Rappelons que

$$e^{-\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} h^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4h}} e^{h\Delta} dh,$$

on insère (2.1) dans la formule précédente, et par le théorème de Fubini, on obtient

$$P(g, g') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}} \Upsilon\left(\frac{\lambda}{\sinh \lambda}\right)^{\frac{n}{2}} d\lambda,$$

avec

$$\Upsilon = \int_0^{+\infty} h^{-\frac{n}{2}-\frac{5}{2}} \exp\left\{ \frac{1}{4h} \left[ i(2s\lambda) - R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - 1 \right] \right\} dh.$$

En utilisant le changement de variable  $\gamma = \frac{1+R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - i(2s\lambda)}{4h}$ , on voit que

$$\Upsilon = \left[ \frac{4}{1 + R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - i(2s\lambda)} \right]^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right),$$

donc,

$$P(g, g') = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\lambda}{\sinh \lambda} \right)^{\frac{n}{2}} \left[ 1 + R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - i(2s\lambda) \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda \\ = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sinh \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\sinh \lambda}{\lambda} \left[ 1 + R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - i(2s\lambda) \right] \right\}^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda.$$

Posons

$$f(R^2, 2s, a; \lambda) = 1 + R^2(\lambda \coth \lambda - a \frac{\lambda}{\sinh \lambda}) - i(2s\lambda) \\ = 1 + \frac{\lambda}{\sinh \lambda} \left[ D_K^2(R^2, 2s) \cosh(\lambda - i\phi) - R^2 a \right],$$

par (2.3), avec  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  défini par  $e^{-i\phi} = D_K^{-2}(R^2, 2s)[R^2 - i(2s)]$ .

On sait bien que  $\Re f(R^2, 2s, a; \lambda) \geq 1$  pour tout  $0 \leq \Im \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ , voir le Lemma 4.3 de [27]. Aussi, pour tout  $0 \leq \beta_2 \leq \frac{\pi}{2}$  et tout  $\beta_1 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\Re \frac{\sinh(\beta_1 + i\beta_2)}{\beta_1 + i\beta_2} = \frac{\beta_1 \sinh \beta_1 \cos \beta_2 + \beta_2 \sin \beta_2 \cosh \beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2} > 0.$$

Définissons

$$F(\lambda) = \left( \frac{\sinh \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\sinh \lambda}{\lambda} + (D_K^2(R^2, 2s) \cosh(\lambda - i\phi) - R^2 a) \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}},$$

en choisissons la branche principale de la fonction racine carée. Alors,  $F$  est analytique sur

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < \Im \lambda < \frac{\pi}{2}\},$$

et continue sur  $\overline{\Omega}$ . De plus, on a

$$\lim_{\lambda \in \overline{\Omega}, |\lambda| \rightarrow +\infty} |F(\lambda)| = 0.$$

Par le théorème fondamental de Cauchy, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} F(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda + i\phi) d\lambda = W,$$

avec

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} + (D_K^2(R^2, 2s) \cosh \lambda - R^2 a) \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ d_K^2(g, g') + \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour terminer la preuve de la Proposition 3.1, il nous reste à montrer le

**Lemme 3.2** *Soit  $U \gg 1$ . Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $d_K(g, g') \geq U\sqrt{n}$ , on a*

$$W = \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) d_K^{-Q-1}(g, g') \left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\right) \left(1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right)\right).$$

**Preuve.** Posons

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{-1}^1 \left( \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ d_K^2(g, g') + \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda, \\ W_2 &= \int_{|\lambda| \geq 1} \left( \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ d_K^2(g, g') + \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} d\lambda. \end{aligned}$$

On a alors  $W = W_1 + W_2$ . On commence par estimer  $W_2$ . On constate d'abord que

$$\left| \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right| \leq \cosh \lambda, \quad \forall 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, |\lambda| \geq 1.$$

Donc, pour  $n \rightarrow +\infty$  avec  $(\sqrt{2}D_K(R^2, 2s) \geq)d_K(g, g') \gg n^{\frac{1}{2}}$ , on a

$$\begin{aligned} |W_2| &\leq \int_{|\lambda| \geq 1} \left[ (d_K^2(g, g') - 1) + (2D_K^2(R^2, 2s) - 2) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} (\cosh \lambda)^{\frac{3}{2}} d\lambda \\ &\leq 2 \int_1^{+\infty} \left[ (d_K^2(g, g') - 2) + (2D_K^2(R^2, 2s) - 2) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} (\cosh \lambda)^{\frac{3}{2}} d\lambda \\ &\leq 2(d_K^2(g, g') - 2)^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \int_1^{+\infty} (1 + \sinh^2 \frac{\lambda}{2})^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} (2 \cosh \frac{\lambda}{2} \sinh \frac{\lambda}{2})^{\frac{3}{2}} d\lambda \\ &\leq (d_K^2(g, g') - 2)^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \frac{16}{n} (\cosh \frac{1}{2})^{-n} \\ &= d_K^{-Q-1}(g, g') e^{-(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}) \ln(1 - 2d_K^{-2}(g, g'))} o(n^{-2}) \\ &= d_K^{-Q-1}(g, g') \left( 1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right) \right) o(n^{-2}). \end{aligned}$$

Il nous reste à étudier  $W_1$  :

On constate d'abord que pour  $-1 \leq \lambda \leq 1$  et  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , on a

$$\left( \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} \right)^{\frac{3}{2}} = \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ 1 + O(\lambda) \right], \quad \frac{1}{\cosh \frac{\lambda}{2}} = 1 + O(\lambda^2),$$

et si on a de plus  $\frac{n}{d_K^2(g, g')} \ll 1$ , alors

$$\begin{aligned} &\left[ d_K^2(g, g') + \frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi} + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \\ &= \left[ d_K^2(g, g') + 2D_K^2(R^2, 2s) \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \ln \left( 1 + \frac{\frac{\sinh(\lambda + i\phi)}{\lambda + i\phi}}{1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{d_K^2(g, g')} \right) \right\} \\ &= d_K^{-Q-1}(g, g') \left( 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right)^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \left[ 1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right) \right] \\ &= d_K^{-Q-1}(g, g') \left( 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right)^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\cosh \frac{\lambda}{2}} \left[ 1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right) \right]. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} W_1 &= \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} d_K^{-Q-1}(g, g') \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2} \right)^{-\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} \left[ 1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right) \right] \left[ 1 + O(\lambda) \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour terminer la preuve du Lemme 3.2, il faut montrer que

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} \left[1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right)\right] \left[1 + O(\lambda)\right] d\lambda \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) \left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\right) \left(1 + O\left(\frac{n}{d_K^2(g, g')}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

En fait, d'une part, on remarque d'abord que

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} d\lambda \\ &= 4 \left[ \int_0^{+\infty} - \int_{\sinh \frac{1}{2}}^{+\infty} \right] \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} h^2\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} dh \\ &= 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} \left[ \int_0^{+\infty} - \int_{\sqrt{2} \frac{D_K(R^2, 2s)}{d_K(g, g')} \sinh \frac{1}{2}}^{+\infty} \right] (1 + \lambda^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} d\lambda, \end{aligned}$$

puis, par le fait que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 + \lambda^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} d\lambda &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right), \quad (\text{voir [10] p.10 (16)}), \\ \int_{\sqrt{2} \frac{D_K(R^2, 2s)}{d_K(g, g')} \sinh \frac{1}{2}}^{+\infty} (1 + \lambda^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} d\lambda &\leq \left(\sinh \frac{1}{2}\right)^{-1} \int_{\sinh \frac{1}{2}}^{+\infty} (1 + \lambda^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \lambda d\lambda \\ &= \left(\sinh \frac{1}{2}\right)^{-1} \frac{1}{n+1} \left(\cosh \frac{1}{2}\right)^{-n-1}, \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + o(1)), \\ n &\longrightarrow +\infty, \quad (\text{voir [15] p.6 et p.12}), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} d\lambda \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) \left[1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\right], \quad n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\sinh h \geq h$  pour tout  $0 \leq h \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\lambda| \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} d\lambda \\ &\leq 2 \int_0^1 2 \sinh \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} \sinh^2 \frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} \cosh \frac{\lambda}{2} d\lambda \\ &\leq 4 \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{2D_K^2(R^2, 2s)}{d_K^2(g, g')} y\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} dy \leq \frac{8}{n+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)}, \end{aligned}$$

par le fait que  $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} \leq 1$ .

On obtient donc (3.1). ■

## 4 Preuve du Théorème 1.1 pour $M = M_K$

Comme

$$P_h(g) \geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \|P_h\|_1 = 1, \quad \forall h > 0,$$

par “the Hopf-Dunford-Schwartz maximal ergodic theorem”, on a

$$\left| \left\{ g; \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-h\sqrt{-\Delta_G}} f(g) dh > \lambda \right\} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1, \quad \forall \lambda > 0, f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Pour montrer le Théorème 1.1, il nous reste à montrer qu’il existe une constante  $A > 0$  telle que pour  $n$  assez grand, on a

$$M_K f(g) \leq A n \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-h\sqrt{-\Delta_G}} f(g) dh, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Par la structure de dilatation sur  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \Delta_G, dg)$ , il suffit de montrer qu’il existe une constante  $L > 0$  telle que pour  $n$  assez grand, avec un  $t(n) > 0$  bien choisi, on a pour tout  $g$  et tout  $g \neq g' \in B_K(g, 1)$

$$\begin{aligned} |B_K(g, 1)|^{-1} \chi_{B_K(g, 1)}(g') &\leq L \frac{n}{t(n)} \int_0^{t(n)} P_h(g, g') dh \\ &= L \frac{n}{t(n)} \int_0^{t(n)} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Choisissons  $U \gg 1$  et  $t(n) = (U\sqrt{n})^{-1}$ , pour  $0 < d_K(g, g') < 1$ , on constate d’abord que

$$\frac{1}{t(n)} \int_0^{t(n)} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh \geq U\sqrt{n} \int_0^{\frac{d_K(g, g')}{U\sqrt{n}}} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh,$$

puis, par la Proposition 3.1, que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t(n)} \int_0^{t(n)} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh \\ &\geq R(n; g, g') U\sqrt{n} \int_0^{\frac{d_K(g, g')}{U\sqrt{n}}} h dh \left(1 + O\left(\frac{1}{U^2}\right)\right) \left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}})\right), \end{aligned}$$

avec

$$R(n; g, g') = \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) \frac{d_K(g, g')}{D_K(R^2, 2s)} d_K^{-Q-1}(g, g').$$

Si  $U$  est choisi assez grand, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on aura pour tout  $0 < d_K(g, g') < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(n)} \int_0^{t(n)} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh &\geq \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} \frac{B(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2})}{D_K(R^2, 2s)} \frac{1}{4U\sqrt{n}} \\ &= \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\pi^{-1}}{D_K(R^2, 2s)} \frac{\sqrt{n}}{8U}, \end{aligned}$$

par le fait que  $B(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}$  et que  $\Gamma(\frac{n}{2} + 1) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$ . Or,  $|S^{n-1}| = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ , on a donc

$$\frac{1}{t(n)} \int_0^{t(n)} h^{-Q} P(\delta_{h^{-1}}(g), \delta_{h^{-1}}(g')) dh \geq \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^{-1}}{D_K(R^2, 2s)|S^{n-1}|} \frac{\sqrt{n}}{4U}.$$

Puisque  $\frac{\sin \phi}{\phi} \geq \frac{2}{\pi}$  pour tout  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , pour démontrer (4.1), il nous reste à montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$n^{\frac{3}{2}} \frac{|B_K(g, 1)|}{D_K(R^2, 2s)|S^{n-1}|} \geq C, \quad \forall g' \in B_K(g, 1), g, n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.2)$$

Ce qui est vraie par (2.9), (1.6) et

$$B\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right) \sim n^{-\frac{3}{2}}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

On a donc montré le Théorème 1.1 pour  $M = M_K$ . ■

## 5 Preuve du Théorème 1.1 pour $M = M_{CC}$

On voit facilement d'après la section 4 que pour montrer le Théorème 1.1 pour  $M = M_{CC}$ , il suffit d'établir les deux propositions suivantes :

**Proposition 5.1** *On a  $d_K(g, g') \leq d_{CC}(g, g')$  pour tous  $g, g'$ .*

**Proposition 5.2** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$|B_{CC}(g, 1)| \geq c|B_K(g, 1)|, \quad \forall g, n \in \mathbb{N}^*.$$

## 5.1 Preuve de la Proposition 5.1

I. Dans le cas où  $x' = -x$  et  $2s \geq \pi|x|^2$ , on a

$$d_{CC}^2(g, g') = 2s\pi, \quad d_K^2(g, g') = \sqrt{(2|x|^2)^2 + (2s)^2} + 2|x|^2.$$

On remarque d'abord que  $\sqrt{2^2 + \pi^2} \leq \pi^2 - 2$ , puis que  $\pi h \geq \sqrt{2^2 + h^2} + 2$  pour tout  $h \geq \pi$ , on obtient  $d_K(g, g') \leq d_{CC}(g, g')$ .

II. Dans d'autres cas : Rappelons que

$$d_K^2(g, g') = \sqrt{R^4 + (2s)^2} - 2x' \cdot x, \quad d_{CC}^2(g, g') = \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^2 R^2 (1 - a \cos \theta),$$

avec  $0 \leq \theta < \pi$  satisfaisant

$$\frac{2s}{R^2} = \frac{\theta}{\sin^2 \theta} - \cot \theta + a \frac{1 - \theta \cot \theta}{\sin \theta} = \mu(a; \theta) \geq 0.$$

Définissons pour  $0 \leq \omega < \pi$ ,  $-1 \leq r \leq 1$ ,

$$G(r, \omega) = \left[ \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 - r \cos \omega) + r \right]^2 - \left( \frac{\omega}{\sin^2 \omega} - \cot \omega + r \frac{1 - \omega \cot \omega}{\sin \omega} \right)^2,$$

il nous reste à montrer que

$$G(r, \omega) \geq 1, \quad \forall 0 \leq \omega < \pi, -1 \leq r \leq 1. \quad (5.1)$$

Pour montrer (5.1), il suffit d'obtenir les estimations suivantes :

$$G(-1, \omega) \geq 1, \quad \forall 0 \leq \omega < \pi, \quad (5.2)$$

$$G(1, \omega) \geq 1, \quad \forall 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \quad (5.3)$$

$$\inf_{-1 \leq r \leq 1, 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}} G(r, \omega) = \inf_{0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}} \min\{G(-1, \omega), G(1, \omega)\}, \quad (5.4)$$

$$\inf_{-1 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} < \omega < \pi} G(r, \omega) = \inf_{\frac{\pi}{2} < \omega < \pi} G(-1, \omega). \quad (5.5)$$

La démonstration de (5.2) et (5.3) est élémentaire, mais il y a beaucoup de calcul des dérivées, on utilisera le logiciel Mathematica pour réduire notre tâche.

**Preuve de (5.2).** On constate que

$$\begin{aligned} G(-1, \omega) &= \left[ \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 + \cos \omega) - 1 \right]^2 - \left[ \frac{\omega}{\sin^2 \omega} - \cot \omega - \frac{1 - \omega \cot \omega}{\sin \omega} \right]^2 \\ &= \left[ 2 \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 - 1 \right]^2 - \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} - \cot \frac{\omega}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

En notant  $y = \frac{\omega}{2}$ , il nous reste à montrer que

$$Z_1(y) = \left[ 2 \left( \frac{y}{\sin y} \right)^2 - 1 \right]^2 - \left( \frac{y}{\sin^2 y} - \cot y \right)^2 \geq 1, \quad \forall 0 \leq y < \frac{\pi}{2}.$$



On a évidemment  $Z_1(0) = 1$ , par le théorème des accroissements finis, il suffit de montrer que  $Z'_1(y) \geq 0$  pour tout  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ . En fait, en utilisant le logiciel Mathematica, on a

$$Z'_1(y) = \frac{1}{\sin^5 y} \left[ (1 + 6y^2 - 16y^4) \cos y - (1 + 2y^2) \cos(3y) + 2y(-5 + 8y^2 + \cos 2y) \sin y \right].$$

Posons

$$z_*(y) = (1 + 6y^2 - 16y^4) \cos y - (1 + 2y^2) \cos(3y) + 2y(-5 + 8y^2 + \cos 2y) \sin y.$$

De la même façon, comme  $z_*(0) = 0$ , il nous reste à montrer que  $z'_*(y) \geq 0$  pour tout  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ . En utilisant encore une fois le logiciel Mathematica, on a

$$z'_*(y) = 4y \cos y (\sin^2 y - 12y^2) + 4y^2 (12 + 4y^2 + 3 \cos(2y)) \sin y - 16 \sin^3 y,$$

par un calcul soigneux, on peut écrire (ou bien le vérifier par Mathematica)

$$\begin{aligned} z'_*(y) = & 4 \left\{ 4y^2 \sin y (y^2 - \sin^2 y) + \sin y (y^2 - \sin^2 y) \right. \\ & \left. + (\sin y - y \cos y) (12y^2 - 2y \sin y \cos y - 3 \sin^2 y) \right\} > 0, \end{aligned}$$

pour tout  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ , en utilisant les inégalités élémentaires

$$1 > \frac{\sin y}{y} > \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2 > \cos y, \quad \forall 0 < y < \pi. \quad (5.6)$$

Ceci achève la preuve de (5.2). ■

**Preuve de (5.3).** Observons que

$$\begin{aligned} G(1, \omega) &= \left[ \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 - \cos \omega) + 1 \right]^2 - \left[ \frac{\omega}{\sin^2 \omega} - \cot \omega + \frac{1 - \omega \cot \omega}{\sin \omega} \right]^2 \\ &= \left[ 2 \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} \right)^2 + 1 \right]^2 - \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} + \tan \frac{\omega}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

En notant  $y = \frac{\omega}{2}$ , il nous reste à montrer que

$$Z_2(y) = \left[ 2 \left( \frac{y}{\cos y} \right)^2 + 1 \right]^2 - \left( \frac{y}{\cos^2 y} + \tan y \right)^2 \geq 1, \quad \forall 0 \leq y < \frac{\pi}{4}.$$

On voit que  $Z_2(0) = 0$ , et par Mathematica, que

$$Z'_2(y) = \frac{2}{\cos^5 y} (\cos y + y \sin y) (8y^3 + 2y \cos(2y) - \sin(2y)).$$

Il nous reste à montrer que

$$V(h) = h^3 + h \cos h - \sin h > 0, \quad \forall 0 < h < \frac{\pi}{2},$$

ce qui est vraie puisque  $V(0) = 0$  et  $V'(h) = h(3h - \sin h) > 0$ . ■

**Preuve de (5.4)-(5.5).** Définissons pour  $-1 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \omega < \pi$ ,

$$\Phi(r, \omega) = \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 - r \cos \omega) + r, \quad \mu(r; \omega) = \frac{\omega}{\sin^2 \omega} - \cot \omega + r \frac{1 - \omega \cot \omega}{\sin \omega},$$

$$G_1(r, \omega) = \Phi(r, \omega) - \mu(r; \omega), \quad G_2(r, \omega) = \Phi(r, \omega) + \mu(r; \omega).$$

Rappelons que  $\mu \geq 0$ . On observe d'abord que  $\Phi \geq 1$ , puisque pour tout  $0 \leq \omega < \pi$ ,

$$\frac{\partial \Phi(r, \omega)}{\partial r} = 1 - \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 \cos \omega \geq 0, \quad \Phi(-1, \omega) = 2 \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 - 1 \geq 1.$$

On a donc  $G_2 \geq 1$ .

Remarquons que  $G = G_1 \cdot G_2$ . On va montrer les estimations suivantes :

$$\frac{\partial G_2(r, \omega)}{\partial r} > 0, \forall 0 < \omega < \pi, \frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} \geq 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2} \leq \omega < \pi \text{ et } \leq 0 \text{ pour } 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.7)$$

On admet (5.7) pour l'instant et on continue avec la démonstration de (5.4)-(5.5) :

Pour  $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$  fixé. Puisque  $\frac{\partial^2 G(r, \omega)}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} \frac{\partial G_2(r, \omega)}{\partial r} \leq 0$ ,  $G(\cdot, \omega)$  est une fonction concave et  $\inf_{-1 \leq r \leq 1} G(\cdot, \omega) = \min\{G(-1, \omega), G(1, \omega)\}$ . On obtient donc (5.4).

Pour  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  fixé. On déduit de (5.7) que  $G_1(r, \omega) \geq G_1(-1, \omega)$ . Par le fait que  $G_2 \geq 1$ ,  $G(-1, \omega) = G_1(-1, \omega)G_2(-1, \omega)$  et (5.2) impliquent que  $G_1(-1, \omega) > 0$  et donc  $G_1 > 0$ . Par conséquent,

$$\frac{\partial G(r, \omega)}{\partial r} = \frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} G_2(r, \omega) + G_1(r, \omega) \frac{\partial G_2(r, \omega)}{\partial r} \geq 0,$$

et on obtient (5.5).

**Preuve de (5.7).** Observons que

$$\frac{\partial G_2(r, \omega)}{\partial r} = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega} \cos \omega \right) + \frac{1}{\sin \omega} \left( 1 - \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \omega \right) > 0,$$

par (5.6).

Remarquons que

$$\frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} = 1 - \frac{1}{\sin \omega} + \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \omega \left( \frac{1}{\sin \omega} - \frac{\omega}{\sin \omega} \right).$$

Pour  $1 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , on a évidemment  $\frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} \leq 0$ .

Pour  $0 \leq \omega \leq 1$ , par (5.6), on a  $\frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} \leq 0$ .

Pour  $\frac{\pi}{2} \leq \omega < \pi$ , pour démontrer  $\frac{\partial G_1(r, \omega)}{\partial r} \geq 0$ , en posant

$$K(\omega) = \sin^2 \omega - \sin \omega - \cos \omega (\omega^2 - \omega),$$

il suffit de montrer que  $K(\omega) > 0$  pour tout  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ . Ce qui est vraie puisque  $K(\frac{\pi}{2}) = 0$  et

$$K'(\omega) = 2(\sin \omega - \omega) \cos \omega + (\omega^2 - \omega) \sin \omega > 0, \quad \forall \frac{\pi}{2} < \omega < \pi.$$

Ceci achève la preuve de (5.7). ■

## 5.2 Preuve de la Proposition 5.2

On voit que pour tout  $u \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$|B_{CC}((x, u), 1)| = |B_{CC}((x, 0), 1)|, \quad |B_K((x, u), 1)| = |B_K((x, 0), 1)|.$$

Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$|B_{CC}((x, 0), 1)| \geq c |B_K((x, 0), 1)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lorsque  $x = 0$ , il suffit de modifier un peu la preuve du Lemme 5.2 de [20] dans le cadre des groupes de Heisenberg. On peut donc supposer dans la suite  $x \neq 0$ .

Définissons pour  $-\pi < \omega < \pi$  et  $-1 \leq r \leq 1$ ,

$$\Psi(r, \omega) = \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 - r \cos \omega), \quad \Xi(\omega) = \frac{2\omega - \sin 2\omega}{2\omega^2 \sin \omega}.$$

On aura besoin des lemmes suivants :

**Lemme 5.3** *Soit  $-1 \leq r \leq 1$ . La fonction paire  $\Psi(r, \cdot)$  est strictement croissante sur  $[0, \pi)$ .*

**Lemme 5.4** *On a*

$$\inf_{0 \leq \omega < \pi} \Xi(\omega) = \Xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}. \quad (5.8)$$

**Lemme 5.5** *A l'exception d'un ensemble de mesure nulle, on a*

$$\begin{aligned} & B_{CC}((x, 0), 1) \\ &= \left\{ (x', t'); \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 R^2 (1 - a \cos \omega) < 1, t' = \frac{1}{2} \mu(a; \omega) R^2, -\pi < \omega < \pi \right\} = \Sigma_1 \\ &= \left\{ (x', \omega); |x' - x| < 1, -\theta_0 < \omega < \theta_0 < \pi, \text{ avec} \right. \\ & \quad \left. |x' - x|^2 + 2x' \cdot x (1 - \cos \theta_0) = \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 \right\} = \Sigma_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On admet les lemmes pour l'instant et on continue avec la preuve de la Proposition 5.2 :

Par le Lemme 5.5, on a

$$|B_{CC}((x, 0), 1)| = \iint_{\Sigma_1} dx' dt' = \iint_{\Sigma_2} \frac{R^2}{2} \mu'(a; \omega) d\omega dx' = \int_{|z| < 1} R^2 \mu(a; \theta_0) dz,$$

où

$$R^2 = |x|^2 + |x'|^2 = |z|^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z), \quad a = \frac{2(|x|^2 + x \cdot z)}{|z|^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z)},$$

et  $0 \leq \theta_0 = \theta_0(x, z) < \pi$  est défini par

$$|z|^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z)(1 - \cos \theta_0) = \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2. \quad (5.10)$$

Donc,

$$\begin{aligned} & |B_{CC}(o, 1)| \\ &= \int_{|z| < 1} \left\{ \left[ |z|^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z) \right] \left( \frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0 \right) + 2(|x|^2 + x \cdot z) \frac{1 - \theta_0 \cot \theta_0}{\sin \theta_0} \right\} dz \\ &= \int_{|z| < 1} \left\{ \left[ \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z) \cos \theta_0 \right] \left( \frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0 \right) + 2(|x|^2 + x \cdot z) \frac{1 - \theta_0 \cot \theta_0}{\sin \theta_0} \right\} dz \\ &= \int_{|z| < 1} \left[ \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 \left( \frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0 \right) + 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 \right] dz. \end{aligned}$$

Rappelons que (voir (2.8) et (2.7))

$$4^{-1}(1 + |x|) \int_{|z| < 1} \sqrt{1 - |z|^2} dz \leq |B_K((x, 0), 1)| \leq 2(1 + |x|) \int_{|z| < 1} \sqrt{1 - |z|^2} dz.$$

Il nous reste à montrer qu'il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $(n, x, z)$ , telle que

$$J = J(x, z) = \frac{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}{2\theta_0^2} + 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 \geq c(1 + |x|) \sqrt{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1, \quad (5.11)$$

avec  $0 \leq \theta_0 < \pi$  déterminé par (5.10).

### 5.3 Preuve de (5.11)

Cas 1.  $|x| \geq 2$ . On déduit de (5.10) que

$$\left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 \geq 2|x|(|x| - 1)(1 - \cos \theta_0),$$

par (5.6), on a  $\theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ . Donc, d'une part,

$$J \geq 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 \geq 2|x|(|x| - 1) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \theta_0 \geq \frac{2}{\pi} |x|^2 \theta_0 \geq \frac{(1 + |x|)}{\pi} |x| \theta_0;$$

d'autre part, (5.10) implique que

$$\begin{aligned} 1 - |z|^2 &= 1 - \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 + 2(|x|^2 + x \cdot z)(1 - \cos \theta_0) \\ &= \frac{\theta_0 - \sin \theta_0}{\theta_0} \cdot \frac{\theta_0 + \sin \theta_0}{\theta_0} + 4|x|(|x| + \frac{x}{|x|} \cdot z) \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \\ &\leq 2 \frac{\theta_0 - \sin \theta_0}{\theta_0} + |x|(|x| + 1) \theta_0^2, \quad \text{par (5.6).} \end{aligned}$$

Or, en utilisant le développement de Taylor d'ordre 3 autour de l'origine pour  $\sin \varphi$ , on a

$$+\infty > C_1 = \sup_{0 < \omega < \pi} \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^3} > \inf_{0 < \omega < \pi} \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^3} = c_1 > 0. \quad (5.12)$$

Donc,

$$1 - |z|^2 \leq \left[ 2C_1 + |x|(|x| + 1) \right] \theta_0^2 \leq 2(C_1 + 2)|x|^2 \theta_0^2,$$

et on obtient (5.11) dans le cas où  $|x| \geq 2$ .

Cas 2.  $|x| < 2$ . Il suffit de montrer que

$$\frac{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}{2\theta_0^2} + 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 \geq c \sqrt{1 - \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 + 4(|x|^2 + x \cdot z) \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}.$$

Observons que  $|x|^2 + x \cdot z \leq |x|^2 + |x| < 6$  et que

$$1 - \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 + 4(|x|^2 + x \cdot z) \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \leq \frac{\theta_0 - \sin \theta_0}{\theta_0} \cdot \frac{\theta_0 + \sin \theta_0}{\theta_0} + 24 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \leq (2C_1 + 6)\theta_0^2.$$

Lorsque  $|x|^2 + x \cdot z \geq 0$ , on a évidemment

$$\frac{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}{2\theta_0^2} + 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 \geq \frac{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}{2\theta_0^2} \geq c_* \theta_0 > 0, \quad \forall 0 < \theta_0 < \pi.$$

Donc, on a l'estimation cherchée.

Lorsque  $|x|^2 + x \cdot z < 0$ , on constate d'abord que

$$0 \leq -(|x|^2 + x \cdot z) = |x| \left( \frac{-x}{|x|} \cdot z - |x| \right) \leq \frac{1}{4},$$

puis, par (5.8), que

$$\begin{aligned} \frac{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}{2\theta_0^2} + 2(|x|^2 + x \cdot z) \sin \theta_0 &= \sin \theta_0 \left[ \Xi(\theta_0) - 2(-|x|^2 - x \cdot z) \right] \\ &\geq \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \sin \theta_0 \Xi(\theta_0) \geq c \theta_0. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de (5.11). ■

## 5.4 Preuve du Lemme 5.3

Lorsque  $0 \leq r \leq 1$ , il suffit d'utiliser le fait que les deux fonctions positives  $\frac{\omega}{\sin \omega}$ ,  $1 - r \cos \omega$  sont strictement croissantes sur  $[0, \pi)$ .

Pour  $-1 \leq r < 0$ , il suffit d'observer que

$$\left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 (1 - r \cos \omega) = (1 + r) \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 + (-2r) \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2.$$

On a donc le Lemme 5.3. ■

## 5.5 Preuve du Lemme 5.4

Il suffit de montrer que  $\Xi'(\omega) < 0$  pour  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ ,  $\Xi'(\frac{\pi}{2}) = 0$ , et  $\Xi'(\omega) > 0$  pour  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ . En fait, par un calcul simple, on a

$$\Xi'(\omega) = -\frac{\cos \omega}{\omega^3 \sin^2 \omega} \left[ \omega^2 + \frac{\omega}{2} \sin(2\omega) - 2 \sin^2 \omega \right].$$

Notons

$$T(\omega) = \omega^2 + \frac{\omega}{2} \sin(2\omega) - 2 \sin^2 \omega, \quad 0 < \omega < \pi,$$

il nous reste à montrer que  $T(\omega) > 0$ . Ce qui est vraie puisqu'on a

$$T(0) = 0, \quad T'(\omega) = 2\omega + \omega \cos(2\omega) - \frac{3}{2} \sin(2\omega),$$

$$T'(0) = 0, \quad T''(\omega) = 4 \sin \omega (\sin \omega - \omega \cos \omega) > 0, \quad \forall 0 < \omega < \pi,$$

en utilisant (5.6). ■

## 5.6 Preuve du Lemme 5.5

Par le Lemme 5.3 et le fait que  $\mu(a; \cdot)$  est strictement croissante, il nous reste à montrer que  $|z = x' - x| < 1$ . En fait, dans le cas où  $|z| < |x|$ , il suffit d'observer que

$$1 > \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 > |x' - x|^2 + 2x' \cdot x(1 - \cos \omega) \geq |z|^2 + 2|x|(|x| - |z|)(1 - \cos \omega) \geq |z|^2.$$

Dans le cas où  $|z| \geq |x|$ , on constate d'abord que

$$\begin{aligned} |x' - x|^2 + 2x' \cdot x(1 - \cos \omega) &\geq |z|^2 \left[ 1 - 2 \frac{|x|}{|z|} \left( 1 - \frac{|x|}{|z|} \right) (1 - \cos \omega) \right] \\ &\geq |z|^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos \omega) \right] = |z|^2 \cos^2 \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

puis que

$$1 > \left( \frac{\omega}{\sin \omega} \right)^2 \left[ |x' - x|^2 + 2x' \cdot x(1 - \cos \omega) \right] \geq |z|^2 \left( \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 \geq |z|^2.$$

On obtient donc le Lemme 5.5. ■

## 6 Appendice I. Sur l'estimation (1.12)

Dans les trois cas connus : les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n$ , les groupes de Heisenberg  $\mathbb{H}(2n, 1)$  et les opérateurs de Grushin  $\Delta_G$ , on peut vérifier que pour certaine  $U > 0$ , il existe une constante  $C(U) > 0$  telle que pour tout  $n$  assez grand, on a

$$\int_0^{\frac{1}{U\sqrt{n}}} e^{-h\sqrt{-\Delta}}(g, g') dh \geq C(U)(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(g, g'), \quad \forall 0 < d_K(g, g') < 1. \quad (6.1)$$

Dès qu'on a l'estimation précédente, on obtient l'estimation (1.12) avec une certaine fonction  $\phi(n)$ . Par la structure de dilatation et “the Hopf-Dunford-Schwartz maximal ergodic theorem”, on a donc

$$\|M_K\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \leq C\phi(n). \quad (6.2)$$

Dans [20] et aussi dans cet article, l'idée de la démonstration de (6.1) est très naturelle : il suffit d'obtenir une estimation inférieure uniformément du noyau de Poisson. Cependant, ce n'est pas nécessaire : comme on a fait dans la démonstration, l'étape crucial se trouve à montrer qu'il existe deux constantes  $c, c' > 0$  telle que pour  $n$  assez grand, on a

$$(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(g, g') - (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}e^{-c\frac{d_K(g, g')}{\sqrt{n}}\sqrt{-\Delta}}(g, g') \geq c'(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(g, g'), \quad \forall g \neq g'. \quad (6.3)$$

Pour vérifier l'estimation (6.3) dans le cadre de  $\mathbb{R}^n$ , on peut utiliser l'expression explicite de  $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$  et de  $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}e^{-h\sqrt{-\Delta}}$  ( $h > 0$ ). Dans le cadre de  $\Delta_G$  (resp.  $\mathbb{H}(2n, 1)$ ), il suffit de modifier un peu la preuve de la Proposition 3.1 de cet article (resp. de [20]). Dans [24], on utilisera les idées ci-dessus afin d'étudier la fonction maximale centrée dans le cadre des groupes de type Heisenberg.

Ce sera beaucoup plus intéressant d'étudier l'estimation de type (6.3) dans une situation générale (avec  $n$  convenable). Sous les conditions de la propriété du doublement du volume et des estimations gaussiennes classiques du noyau de la chaleur, ce serait raisonnable de croire que (6.3) est satisfaite.

De plus, sans utiliser la structure de dilatation, l'estimation (1.12) doit s'interpréter par

$$\inf_{n \geq 3, h > 0, g \neq g' \in B(g, h)} \phi(n) \frac{\sqrt{n}}{h} |B(g, h)| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(g, g') > 0.$$

Enfin, on insiste encore une fois : par notre connaissance, nous ne savons pas comment établir une estimation de type (1.10) dans le cadre des groupes de Heisenberg ou dans le cadre des opérateurs de Grushin.

## 7 Appendice II. Les cas $p > 1$

Pour  $p > 1$ , on a le résultat suivant :

**Théorème 7.1** *Pour tout  $1 < p < +\infty$ , il existe une constante  $A_p > 0$  telle qu'on a*

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (7.1)$$

avec  $M = M_K$  ou bien  $M = M_{CC}$ .

**Remarques.** 1. On rappelle qu'une estimation de type (7.1) a été obtenue par Stein et Strömberg dans le cadre des espaces euclidiens pour la fonction maximale standard de Hardy-Littlewood (voir [32] ou bien [30] et [31]), et par J. Zienkiewicz dans le cadre des groupes de Heisenberg pour la fonction maximale définie par la distance de Carnot-Carathéodory ou bien par celle de Korányi (voir [34]). Récemment, en utilisant l'idée principale de cet article, l'auteur a démontré l'estimation (7.1) dans le cadre des espaces hyperboliques réels ou complexes, voir [22] pour les détails. Il existe aussi d'autres résultats (partiels), voir par exemple [3]-[7], [16], [26], [25] et leurs références.

2. Remarquons que c'est impossible d'établir une estimation de type (7.1) dans le cas général. Par exemple, pour tout  $n \geq 2$  et tout  $1 < p_0 < +\infty$ , considérons  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$  muni de la métrique hyperbolique  $d_H$

$$d_H((y, x), (y', x')) = \operatorname{arcosh} \frac{y^2 + y'^2 + |x - x'|^2}{2yy'}, \quad \forall (y, x), (y', x') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1},$$

et de la mesure

$$d\mu_{n,p_0}(y, x) = y^{-\frac{p_0}{2p_0-1}(n-1)-1} dy dx,$$

avec  $dx$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ . On sait bien que  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, d, d\mu_{n,p_0})$  est à croissance exponentielle du volume. Dans cet espace,  $M$  est borné sur  $L^p$  pour  $p > p_0$  mais pas pour  $1 \leq p < p_0$ , voir [18] pour les détails et pour plus d'exemples.

3. L'idée de la preuve du théorème 7.1 provient de [22]. Pour expliquer à peu près la démonstration, on observe que

$$\Delta_G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial u^2},$$

ça nous conduit d'utiliser la séparation des variables et d'établir une estimation de type

$$M_K f(x, u) \leq c M_{\mathbb{R}^n} \left( M_{\mathbb{R}} f(\cdot, u) \right)(x), \quad (7.2)$$

où la constante  $c > 0$  est indépendante de  $(n, f, (x, u))$ .

**Preuve du Théorème 7.1.** Il nous reste à démontrer (7.2). Dès qu'on a cette estimation, par les Propositions 5.1 et 5.2, on a aussi  $M_{CC} f \leq c' M_{\mathbb{R}^n} (M_{\mathbb{R}} f)$ ; ensuite, il suffit d'utiliser le fait que (voir [30], ou [31], [32]) :

$$\|M_{\mathbb{R}^n}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_p.$$

Dans la suite, on donne **la preuve de (7.2)**.



Par la structure de dilatation, il suffit de démontrer que

$$\frac{1}{B_K((x, u), 1)} \int_{B_K((x, u), 1)} |f(x', u')| dx' du' \leq c M_{\mathbb{R}^n} \left( M_{\mathbb{R}} f(\cdot, u) \right)(x). \quad (7.3)$$

En effet, par (2.6), on a

$$\begin{aligned} \int_{B_K((x, u), 1)} |f(x', u')| dx' du' &= \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)} \left[ \int_{2|u-u'| < \sqrt{(1-|x-x'|^2)(1+|x-x'|^2)}} |f(x', u')| du' \right] dx' \\ &\leq \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)} \sqrt{(1-|x-x'|^2)(1+|x-x'|^2)} M_{\mathbb{R}} f(x', u) dx' \\ &\leq 2(1+|x|) \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)} \sqrt{1-|x-x'|^2} M_{\mathbb{R}} f(x', u) dx', \end{aligned}$$

en utilisant (2.8).

(2.7) et (2.8) impliquent que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B_K((x, u), 1)} \int_{B_K((x, u), 1)} |f(x', u')| dx' du' \\ &\leq 8 \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)} \sqrt{1-|x-x'|^2} M_{\mathbb{R}} f(x', u) dx' \left( \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1)} \sqrt{1-|x-x'|^2} dx' \right)^{-1} \\ &= 8 \left[ M_{\mathbb{R}} f(\cdot, u) * \Phi \right](x), \end{aligned}$$

avec

$$\Phi(x) = \sqrt{1-|x|^2} \chi_{B_{\mathbb{R}^n}(o, 1)}(x) \left( \int_{B_{\mathbb{R}^n}(o, 1)} \sqrt{1-|x'|^2} dx' \right)^{-1},$$

qui est une fonction non-négative, radialement décroissante avec  $\|\Phi\|_1 = 1$ . Par la propriété élémentaire de  $M_{\mathbb{R}^n}$ , on a donc

$$\frac{1}{B_K((x, u), 1)} \int_{B_K((x, u), 1)} |f(x', u')| dx' du' \leq 8 M_{\mathbb{R}^n} \left( M_{\mathbb{R}} f(\cdot, u) \right)(x).$$

Ceci achève la preuve du Théorème 7.1. ■

Vraisemblablement, en suivant l'idée ci-dessus, on peut étudier l'estimation de type (7.1) dans le cas où

$$\Delta_G = \Delta_x + |x|^{2k-2} \Delta_u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad k, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce sera vraie au moins pour  $(m, k)$  fixé.

## Remerciements

L'auteur est partiellement supporté par le NSF of China (Grant No. 10871048), NCET-09-0316, "Fok Ying Tong Education Foundation (Grant No. 111001)" et "The Program for Professor of Special Appointment (Eastern Scholar) at Shanghai Institutions of Higher Learning". Je voudrais remercier aussi Prof. P. Sjögren pour m'avoir indiqué une faute dans l'estimation de  $|B_K(g, 1)|$ .

## Références

- [1] R. Beals, B. Gaveau, Peter C. Greiner, Green's functions for some highly degenerate elliptic operators, *J. Funct. Anal.* 165 (1999) 407–429. Erratum, *J. Funct. Anal.* 201 (2003) 301.
- [2] R. Beals, B. Gaveau, Peter C. Greiner, Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, *J. Math. Pures Appl.* (9) 79 (2000) 633–689.
- [3] J. Bourgain, On the  $L^p$ -bounds for maximal functions associated to convex bodies in  $\mathbb{R}^n$ , *Israel J. Math.* 54 (1986) 257–265.
- [4] J. Bourgain, On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies, *Amer. J. Math.* 108 (1986) 1467–1476.
- [5] J. Bourgain, On dimension free maximal inequalities for convex symmetric bodies in  $\mathbb{R}^n$ , *Lecture Notes in Math.* 1267 (1987) 168–176.
- [6] J. Bourgain, Geometry of Banach spaces and harmonic analysis. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 871–878, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [7] A. Carbery, An almost-orthogonality principle with applications to maximal functions associated to convex bodies, *Bull. Amer. Math. Soc.* 14 (1986) 269–273.
- [8] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Springer L.N. $n^0$  242, 1971.
- [9] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators. I. General Theory. With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Interscience Publishers, Inc., New York ; Interscience Publishers, Ltd., London 1958.
- [10] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vols. I Based, in part, on notes left by Harry Bateman*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London 1953.
- [11] C. L. Fefferman, A. Sánchez-Calle, Fundamental solutions for second order subelliptic operators, *Ann. Math.* 124 (1986) 247–272.
- [12] G. B. Folland, A fundamental solution for a subelliptic operator, *Bull. Amer. Math. Soc.* 79 (1973) 373–376.
- [13] V. V. Grušin, A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold, *Mat. Sb. (N.S.)* 126 (1971) 163–195.
- [14] D. Jerison, A. Sánchez-Calle, *Subelliptic second order differential operators*. Complex analysis III. Proceedings of the Special Year at University of Maryland 1985–1986, Lect. Notes in Math. vol. 1277, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1987, pp. 46–77.
- [15] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1966.
- [16] D. Müller, A geometric bound for maximal functions associated to convex bodies, *Pacific J. Math.* 142 (1990) 297–312.

- [17] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, Balls and metrics defined by vector fields I. Basic properties, *Acta Math.* 155 (1985) 103–147.
- [18] H.-Q. Li, La fonction maximale de Hardy-Littlewood sur une classe d’espaces métriques mesurables, *C. R. Acad. Sci. Paris* 338 (2004) 31–34.
- [19] H.-Q. Li, Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344 (2007) 497–502.
- [20] H.-Q. Li, Fonctions maximales centrées de Hardy-Littlewood sur les groupes de Heisenberg, *Studia Mathematica* 191 (2009) 89–100.
- [21] H.-Q. Li, Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur pour l’opérateur de Grushin, *Comm. Partial Differential Equations* 37 (2012) 794–832.
- [22] H.-Q. Li, Centered Hardy-Littlewood maximal functions hyperbolic spaces,  $p > 1$ . Prépublication 2011.
- [23] H.-Q. Li, N. Lohoué, Fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood sur les espaces hyperboliques. *Ark. Mat.* DOI : 10.1007/s11512-011-0163-3
- [24] H.-Q. Li, B. Qian, Centered Hardy-Littlewood maximal functions on Heisenberg type groups. Prépublication 2011.
- [25] A. Naor, T. Tao, Random martingales and localization of maximal inequalities, *J. Funct. Anal.* 259 (2010) 731–779.
- [26] A. Nevo, E. M. Stein, A generalization of Birkhoff’s pointwise ergodic theorem, *Acta Math.* 173 (1994) 135–154.
- [27] M. Paulat, Heat kernel estimates for the Grushin operator. Arxiv preprint arXiv :0707.4576v1, 2007 - arxiv.org.
- [28] D. W. Robinson, A. Sikora, Analysis of degenerate elliptic operators of Grushin type, *Math. Z.* 260 (2008) 475–508.
- [29] A. Sánchez-Calle, Fundamental solutions and geometry of the sum of square of vector fields, *Invent. math.* 78 (1984) 143–160.
- [30] E. M. Stein, The development of square functions in the work of A. Zygmund, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 7 (1982) 359–376.
- [31] E. M. Stein, *Three variations on the theme of maximal functions*. Recent progress in Fourier analysis (El Escorial, 1983), 229–244, North-Holland Math. Stud., 111, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [32] E. M. Stein, J.-O. Strömberg, Behavior of maximal functions in  $\mathbb{R}^n$  for large  $n$ , *Ark. Mat.* 21 (1983) 259–269.
- [33] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 100. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [34] J. Zienkiewicz, Estimates for the Hardy-Littlewood maximal function on the Heisenberg group, *Colloq. Math.* 103 (2005) 199–205.

School of Mathematical Sciences  
Fudan University  
220 Handan Road  
Shanghai 200433  
People's Republic of China  
E-Mail : hongquan\_li@fudan.edu.cn    ou    hong\_quanli@yahoo.fr